

# РАЗВИТИЕ ИДЕЙ И РЕЗУЛЬТАТОВ Ф.Д.ГАХОВА ПО ОБРАТНЫМ КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ

Л. А. Аксентьев

Казанский государственный университет  
leonid.aksentev@ksu.ru

В обзорный доклад включены материалы из статьи [1], в которой содержится конспект аналогичного доклада на конференции в Минске в 1981 году. Дополнительно приведены некоторые подробности из драматического положения дел в обратных краевых задачах в 1953 году [2]. В полемике, которая возникла в 50-е годы между Ф.Д.Гаховым, с одной стороны, и М.Т.Нужиным, С.Н.Андриановым, с другой стороны, выявлялись тонкости и устранялись допущенные неточности. Следы этой полемики имеются в монографиях Ф.Д.Гахова [3] и Г.Г.Тумашева, М.Т.Нужина [4].

Отмечу основные этапные моменты в развитии идей Ф.Д.Гахова после 1981 года.

1. В 1984 году мне посчастливилось заметить [5], что разрешимость внешней обратной краевой задачи (ОКЗ) в постановке Ф.Д.Гахова тесно связана с классическим объектом геометрической теории функций – конформным (внутренним) радиусом. Оказалось, что решение внешней ОКЗ  $z_-(\zeta)$  с производной в форме

$$z'_-(\zeta) = z'_+(\zeta) \left( \frac{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta}{\zeta - \zeta_0} \right)^2, \quad |\zeta| < 1,$$

имеет единственное представление тогда и только тогда, когда решение соответствующей внутренней ОКЗ определяет конформный радиус  $R[z_+(\zeta)] = |z'_+(\zeta)|(1 - |\zeta|^2)$  с единственным максимумом:

$$\operatorname{res}_{\zeta_0} z'_-(\zeta) = 0 \iff \left. \frac{\partial R[z_+(\zeta)]}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=\zeta_0} = 0 \iff \frac{z''_+(\zeta_0)}{z'_+(\zeta_0)} = \frac{2\bar{\zeta}_0}{1 - |\zeta_0|^2}.$$

По моему предложению третий объект в этих переходах стал называться уравнением Гахова.

Применение конформного радиуса к ОКЗ [5] открыло широкую область исследований, результаты которых оказались полезными и в теории ОКЗ, и в геометрической теории функций. В

этом направлении была опубликована серия статей и защищены кандидатские диссертации М.И.Киндером (1985), А.В.Киселевым (1989), А.В.Казанцевым (1990), Г.Г.Бильченко (1998) и Н.И.Поповым (1998). В недавно вышедшей статье [6] выделены подклассы почти выпуклых и звездообразных функций  $z_+(\zeta)$ , обеспечивающих единственность решения внешней ОКЗ. Тем самым дополнены результаты С.Р.Насырова и Ю.Е.Хохлова [7] по теоремам единственности в классах звездообразных и спиралеобразных функций  $z_-(\zeta)$  и условия единственности точки максимума конформного радиуса, которые опубликованы Кшижем [8] и Кюнау [9]. Многие проблемы о подклассах регулярных функций, обеспечивающих единственность решения внешней ОКЗ, до сих пор не решены, хотя намечены подходы к их исследованию, использующие интересные сопоставления с вопросами единственности в обратных задачах логарифмического потенциала.

2. Начиная с 1985 года, в серии работ Ф.Г.Авхадиева и С.Р.Насырова получены окончательные результаты в задаче, которую я узнал в 1952 году от Ф.Д.Гахова и Ю.М.Крикунова, авторов замечательной статьи [10]. В вольном изложении задача звучит как проблема распутывания незаузленного клубка ниток. Другими словами, это – проблема поднятия кривой, имеющей самопересечения, с плоскости на риманову поверхность или проблема построения римановой поверхности по проекции края. Как выяснил С.Р.Насыров, такая проблема в алгебраической геометрии имеет довольно солидную историю, идущую от Пикара и Левнера. Положительные результаты по решению этой проблемы и различных ее обобщений содержатся в книге [11], воспроизводящей докторскую диссертацию Ф.Г.Авхадиева (1990), и в докторской диссертации С.Р.Насырова (1995).

3. Как продолжение статьи [10], изучались ОКЗ с широкими классами искомых функций и искомых контуров. Здесь первостепенную роль сыграла идея Ф.Г.Авхадиева ([11], гл. 3) доказывать разрешимость аналогов уравнения Гахова методом вращения векторных полей. В качестве дополнения к результатам из ([11], гл. 3) отмечу цикл статей [12], [13] по обоснованию картины разрешимости ОКЗ на римановых поверхностях.

Существенным прорывом в вопросах разрешимости ОКЗ явилось использование подходов из теории некорректных задач. Строгое понятие квазирешения в ОКЗ и систематическое применение

квазирешений в аэрогидромеханике даны в докторской диссертации А.М.Елизарова (1991) и в фундаментальной монографии [14].

4. Бурное развитие получила инициатива Ф.Д.Гахова по однолистной разрешимости ОКЗ, которую поддержали С.Н.Андрианов, М.Т.Нужин и Г.Г.Тумашев. В мировой математике имеется устойчивый интерес к геометрической теории функций в части достаточных условий однолистности и конечности с их применениями. Свидетельством тому служит большая статья 1987 года [15] и две более ранние обзорные работы [16], [17]. В списке литературы к [15] содержатся названия около 500 современных статей, среди которых более 150 принадлежат зарубежным авторам.

Из работ молодых математиков, использующих методы геометрической теории функций в исследовании ОКЗ, отмечу кандидатские диссертации Ф.Х.Арсланова (1991), В.П.Чуева (1992), Г.Г.Бильченко (1998) и Н.Р.Абубакирова (1999). Н.Р.Абубакиров обосновал условия однолистной разрешимости трехпараметрических ОКЗ и обнаружил любопытный эффект зависимости картины разрешимости этих задач от порядка следования параметров.

В качестве завершения представленного доклада можно вполне оптимистично отметить, что дело, которому служили наши учителя С.Н.Андрианов, Ф.Д.Гахов, М.Т.Нужин, Г.Г.Тумашев, продолжает успешно развиваться.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Аксентьев Л.А., Елизаров А.М., Киндер М.И. *О продолжении работ Ф.Д.Гахова по обратным краевым задачам* // Научные труды юбилейного семинара по краевым задачам, посвященного 75-летию со дня рождения Ф.Д.Гахова. – Минск: Изд-во Университетское. – 1985. – С.30–43.
2. Аксентьев Л.А. *Об одном письме Ф.Д.Гахова М.Т.Нужину* // Михаил Тихонович Нужин. Воспоминания современников. – Казань: Изд-во Унипресс. – 1999. – С.97–100.
3. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи*. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
4. Тумашев Г.Г., Нужин М.Т. *Обратные краевые задачи и их приложения*. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965. – 333 с.
5. Аксентьев Л.А. *Связь внешней обратной краевой задачи с внутренним радиусом области* // Изв. вузов. Математика. – 1984. – N 2. – С.3–11.

6. Аксентьев Л.А., Казанцев А.В., Попов Н.И. *О теоремах единственности для внешней обратной краевой задачи в подклассе однолистных функций* // Изв. вузов. Математика. – 1998. – N 8. – С.3–13.

7. Насыров С.Р., Хохлов Ю.Е. *Единственность решения внешней обратной краевой задачи в классе спиралеобразных областей* // Изв. вузов. Математика. – 1984. – N 8. – С.24–27.

8. Krzyż J.G. *Some remarks on the maxima of inner conformal radius* // Ann. UMCS. A. – 1992. – Т.46. – Р.57–61.

9. Kühnau R. *Maxima beim konformen Radius einfach zusammenhängender Gebiete* // Ann. UMCS. A. – 1992. – Т.46. – Р.63–73.

10. Гахов Ф.Д., Крикунов Ю.М. *Топологические методы теории функций комплексного переменного и их приложения к обратным краевым задачам* // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1956. – Т.20. – N 2. – С.207–240.

11. Авхадиев Ф.Г. *Конформные отображения и краевые задачи*. – Казань: Казанск. фонд “Математика”, 1996. – 216 с.

12. Аксентьев Л.А., Елизаров А.М., Киндер М.И. *Обратные краевые задачи для многосвязных областей на римановых поверхностях рода нуль, I–III* // Тр. семинара по краев. задачам. – Казан. ун-т. – I: 1984. – Вып. 21. – С.19–32; II: 1985. – Вып. 22. – С.16–29; III: 1986. – Вып. 23. – С.25–36.

13. Аксентьев Л.А., Елизаров А.М., Киндер М.И. *Доказательство разрешимости обратных краевых задач методом векторных полей* // Изв. вузов. Математика. – 1986. – N 8. – С.82–84.

14. Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В. *Обратные краевые задачи аэродинамики*. – М.: Наука, 1994. – 440 с.

15. Авхадиев Ф.Г., Аксентьев Л.А., Елизаров А.М. *Достаточные условия конечности аналитических функций и их приложения* // Итоги науки и техники. Серия мат. анализ. – М.: ВИНТИ. – 1987. – С.3–121.

16. Авхадиев Ф.Г., Аксентьев Л.А. *Достижения и проблемы в достаточных условиях конечности аналитических функций* // Изв. вузов. Математика. – 1986. – N 10. – С.3–16.

17. Авхадиев Ф.Г., Аксентьев Л.А. *Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций* // Успехи мат. наук. – 1975. – Т.30. – Вып.4 – С.3–60.